КАЛМЫЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра экспериментальной и общей физики

Лабораторная работа № 6

«ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА»

Лаборатория № 210

Лабораторная работа № 6

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Цель работы: изучение динамики вращательного движения.
Оборудование: маятник Обербека, набор грузов, электронный секундомер.

Т е о р и я

При *вращательном движении* все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью вращения*. Для описания вращательного движения нужно задать положение в пространстве оси вращения и угловую скорость тела в каждый момент времени.

В работе изучается динамика вращательного движения. В частности, экспериментально проверяется *основное уравнение динамики* - уравнение моментов для вращения вокруг неподвижной оси:

$$I\vec{\varepsilon} = \sum_i \vec{M}_i \qquad (1)$$

Сумма (векторная) моментов внешних сил $\sum_i \vec{M}_i$, вращающих тело вокруг данной оси, равна произведению момента инерции тела $\boldsymbol{I}$ относительно оси вращения и углового ускорения тела $\vec{\varepsilon}$.

Основное уравнение динамики вращательного движения (1) является аналогом основного уравнения динамики поступательного движения (2-го закона Ньютона):

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}\ .$$

Момент инерции тела $\boldsymbol{I}$ играет во вращательном движении ту же роль, что масса в поступательном - он характеризует инертность тела по отношению к внешнему воздействию.

Для твердого тела *момент инерции* находится как сумма произведений массы каждой частицы тела $\boldsymbol{\Delta m_i}$ на квадрат расстояния ее от оси вращения:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$$

Таким образом, момент инерции тела зависит не только от массы, но и от ее расположения относительно оси вращения.

Угловой скоростью $\vec{w}$ называется величина, равная отношению угла поворота вращения $\boldsymbol{d\varphi}$ ко времени $\boldsymbol{dt}$, в течении которого произошел этот поворот:

$$\boldsymbol{w = d\varphi / dt},$$

т.е. угловая скорость численно равна первой производной от угла поворота по времени.

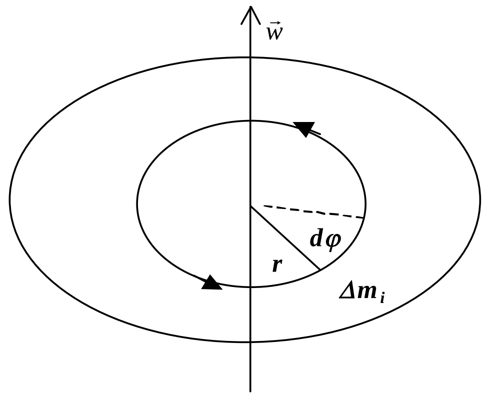

Рис. 1.

Направление вектора угловой скорости $\vec{w}$ задается правилом правой руки: если четыре полусогнутых пальца направить по направлению вращения, то отогнутый большой палец покажет направление вектора $\vec{w}$**.**

Угловое ускорение тела $\boldsymbol{\varepsilon}$ характеризует изменение угловой скорости со временем:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t} = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

Момент силы $\boldsymbol{M}$ относительно оси вращения называют физическую величину, численно равную произведению силы $\boldsymbol{F}$ на плечо $\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{l}.$$

Плечом силы называется кратчайшее расстояние от оси вращения О до линии, вдоль которой действует сила (рис. 2). Момент сил, вращающих тело в разные стороны, считаются разными по знаку.

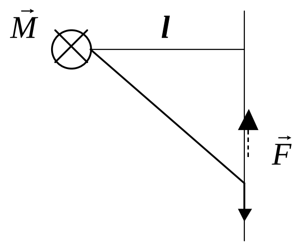

Рис. 2.

Маятник Обербека, с помощью которого удобно исследовать уравнение (1), схематически показан на рис. 3.

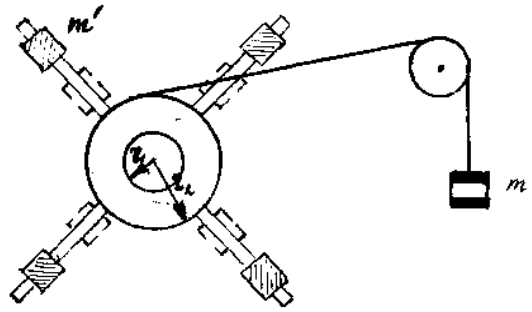

Рис. 3.

Он состоит из четырех стержней и двух шкивов разных радиусов $\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{r_2}$, насаженных на общую ось. Ось вращения расположена горизонтально. По стержням могут перемещаться и закрепляться в нужном положении грузы одинаковой массы $\boldsymbol{m''}$. Передвигая грузы по стержням, можно легко изменять момент инерции $\boldsymbol{I}$ тела. На шкив намотана нить, к которой привязана платформа известной массы. На платформу кладется груз, нить натягивается и создает вращающий момент:

$$\boldsymbol{M = T \cdot r}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{T}$ - сила натяжения нити, $\boldsymbol{r}$ - радиус шкива ($\boldsymbol{r}$ равен $\boldsymbol{r_1}$ или $\boldsymbol{r_2}$). Силу $\boldsymbol{T}$ можно найти из уравнения поступательного движения платформы с грузом:

$$\boldsymbol{m \cdot g - T = m \cdot a}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{m}$ - масса платформы с грузом, $\boldsymbol{a}$ - ее ускорение. Ускорение связано с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}$ соотношением

$$\boldsymbol{\varepsilon = a / r} \tag{4}$$

Из уравнений (2) и (3) получаем, что момент силы натяжения нити:

$$\boldsymbol{M = T \cdot r = m\,(g - a) \cdot r} \tag{5}$$

Пренебрегая силами трения, можно написать уравнение вращательного движения маятника:

$$\boldsymbol{I \cdot \varepsilon = M}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ находится из уравнения (4), а $\boldsymbol{M}$ - из уравнения (5).

В уравнения (4) и (5) входит ускорение $\boldsymbol{a}$ платформы. Это ускорение можно довольно просто определить, измеряя время $\boldsymbol{t}$, в течение которого платформа с грузом опустится на расстояние $\boldsymbol{h}$, из уравнения:

$$\boldsymbol{a = 2 \cdot h / t^2}. \tag{7}$$

С учетом (7) соотношения (4) и (5) имеют вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon = 2 \cdot h / t^2\, r} \tag{8}$$

и

$$\boldsymbol{M = m\,(g - 2\,h / t^2) \cdot r}. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (6), получаем выражение для момента инерции маятника:

$$I = \frac{M}{\varepsilon} = m r^2 \left(\frac{g t^2}{2h} - 1 \right) \quad (10)$$

Момент инерции твердого тела зависит от выбора оси вращения.

Теорема Гюйгенса-Штейнера позволяет вычислить момент инерции относительно произвольной оси ***AA***. Зная момент инерции относительно оси ***CC***, проходящей через центр инерции тела. Она формулируется следующим образом (рис. 4): момент инерции $\boldsymbol{I}$ относительно произвольной оси равен сумме момента инерции $\boldsymbol{I_c}$ относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы $\boldsymbol{m}$ тела на квадрат расстояния $\boldsymbol{l}$ между осями:

$$\boldsymbol{I = I_c + m\, l^2}.$$

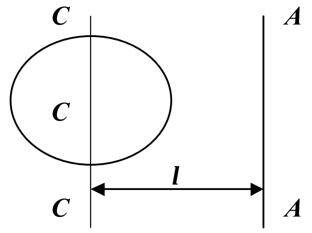

Рис. 4.

Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника Обербека может быть записан в виде:

$$\boldsymbol{I = I_c + 4\, m'\, l^2}, \quad (11)$$

где $\boldsymbol{l}$ - расстояние центров грузов $\boldsymbol{m'}$ от оси вращения (рис. 3), $\boldsymbol{I_c}$ - момент инерции системы при $\boldsymbol{l} = 0$. При расположении центров грузов $\boldsymbol{m'}$ на расстоянии $\boldsymbol{l_1}$ от оси вращения момент инерции будет равен:

$$\boldsymbol{I_1 = I_c + 4\, m'\, l_1^2}.$$

При удалении центров грузов $\boldsymbol{m'}$ на расстоянии $\boldsymbol{l_2}$ соответственно имеем:

$$\boldsymbol{I_2 = I_c + 4\, m'\, l_2^2}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{I_2 - I_1 = 4\, m' (l_2^2 - l_1^2)} \quad (12)$$

Но с другой стороны уравнение (10) дает:

$$I_2 - I_1 = \frac{m \cdot r^2 \cdot g}{2h} \left(t_2^2 - t_1^2 \right) \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) получаем:

$$4 m' \left(l_2^2 - l_1^2 \right) = \frac{m \cdot r^2 \cdot g}{2h} \left(t_2^2 - t_1^2 \right)$$

или

$$\frac{8 \cdot h \cdot m'}{m \cdot r^2 \cdot g} \left(l_2^2 - l_1^2 \right) = t_2^2 - t_1^2 \quad (14)$$

Таким образом, для проверки основного уравнения динамики вращательного движения (1) имеется два варианта: можно изменять момент внешних сил $\boldsymbol{M}$

при постоянном моменте инерции ***I*** (***I = const)*** и можно изменять момент инерции ***I*** при постоянном значении момента внешних сил ***M (M = const)***.

И З М Е Р Е Н И Я.

1. Закрепить подвижные грузы на четырех стержнях на заданном одинаковом расстоянии от оси вращения.

2. Проверить, не задевает ли платформа с грузом при своем движении корпуса верхнего и нижнего фотоэлектрических датчиков.

3. Нажать кнопку “СЕТЬ”.

4. Положить на платформу необходимое число грузов и определить их суммарную массу ***m*** (вместе с платформой).

5. Наматывая нить на выбранный шкив (радиусом r_1 или r_2), установить нижний край платформы точно по черте на корпусе верхнего фотоэлектрического датчика.

6. Отсчитать по шкале, расположенной на колонне, длину пути падения ***h***, как расстояние между верхними срезами крепления кронштейнов.

7. Нажать кнопку “ПУСК”.

8. Прочитать на табло электронного секундомера измеренное значение времени падения грузов на пути ***h***.

9. Измерение повторить не менее 3 раз и определить среднее значение времени движения грузов по формуле:

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$

где ***n*** - число измерений, t_i - значение *i*-го измерения.

З А Д А Н И Е .

1. Проверьте, подтверждается ли экспериментально линейная зависимость между угловым ускорение ε и моментом ***M*** приложенной силы при постоянном моменте инерции: ***I = const*** (см. уравнение (6)). В этой серии измерений положение грузов m' на четырех стержнях не меняется.

Для определения зависимости $\varepsilon = \varepsilon(M)$ измерьте время ***t***, за которое платформа с грузом ***m*** опускается на расстояние ***h***. Измерение времени ***t*** для каждого груза повторите три раза и найдите среднее значение времени падения грузов.

Такие же измерения выполните для четырех значений массы ***m*** груза, подвешенного на шкиве радиусом r_1, и столько же - на шкиве радиусом r_2. Используя средние значения времени падения ***t***, вычислите угловые ускорения ε по формуле (8) и моменты сил ***M*** по формуле (9).

Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 1.

Таблица 1.

m, кг	r, м	h, м	Δh, м	t_1, с	t_2, с	t_3, с	t, с	Δt, с	ε, рад/с$^{-2}$ м	M, Н м

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - t)^2}{n(n-1)}}(n = 3)$$

Полученные экспериментально точки нанесите в координатной плоскости $X=M$, $Y=\varepsilon$ и по ним постройте график зависимости $\varepsilon=\varepsilon(M)$.

2. Проведите экспериментальную проверку соотношения (14). Для этого измерьте время t_1 опускания груза m с высоты h, когда грузы m' на стержнях расположены вблизи оси вращения, на расстоянии $l_1 = l_{min}$ от оси. Измерения времени опускания повторите не менее трех раз и найдите среднее арифметическое значение. Величину l_1 (расстояние от середины груза m' до оси маятника) определите, как среднее арифметическое из четырех значений, полученных для каждого груза на стержне в отдельности. Затем передвиньте грузы m' на стержнях в новое положение, наиболее удаленное от оси маятника $l_2 = l_{max}$. Для такого же маятника, так же, как и раньше, измерьте время опускания t_2 и расстояние l_2. В этом опыте все измерения проводите при постоянной массе m груза, подвешенного на одном и том же шкиве радиусом r_2 ($M=const$).

Результаты измерений занесите в таблицу 2.

Таблица 2.

m, кг	m', кг	h, м	r, м	l_1, м	$t_{1,1}$, с	$t_{1,2}$, с	$t_{1,3}$, с	$t_{1ср}$, с	Δt_1, с	l_2, м	$t_{2,1}$, с	$t_{2,2}$, с	$t_{2,3}$, с	$t_{2ср}$, с	Δt_2, с

Пользуясь полученными результатами, убедитесь (в пределах ошибок измерений) в правильности соотношения (14), а следовательно, и формулы (11).

Контрольные вопросы

1. Какое движение называется вращательным?
2. Что называется угловой скоростью и угловым ускорением?
3. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса-Штейнера.
4. Закон Ньютона для вращательного движения?
5. Что такое момент вращения?

Л и т е р а т у р а

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1, Механика, М., 1989.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т.1, М., 1989.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М., 1989.