

КАЛМЫЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра экспериментальной и общей физики

Лабораторная работа № 13

«Изучение колебаний связанных систем»

Лаборатория № 210

Лабораторная работа № 13
«Изучение колебаний связанных систем»

Цель работы: исследование колебаний связанных систем и явления резонанса.

Приборы и принадлежности: прибор для исследования колебаний связанных систем FPM-13.

Т Е О Р И Я

Колебательный процесс в системе может возникнуть в двух случаях. В первом из них за счет внешней силы система выводится из состояния устойчивого равновесия, т.е. ей сообщается некоторое достаточное количество потенциальной или кинетической энергии, после чего внешние силы (за исключением сил трения, если они присутствуют) полностью отключаются. Тогда, за счет работы внутренних сил, образующихся в системе происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот. В этом случае возникают колебания, которые называются *собственными* колебаниями системы. Другой случай реализуется, если на систему постоянно действует внешняя, зависящая от времени сила. В этом случае возникают так называемые *вынужденные* колебания системы. В обоих случаях в системе могут возникнуть достаточно сложные движения, описание которых потребует большого количества параметров (координат), определяющих число степеней свободы системы.

Реальная физическая система при учете всех возможных в ней типов движений обладает практически бесконечным числом степеней свободы. Но в абстрактной модели необходимо учитывать лишь тот масштаб времени и амплитуды смещений, который может быть зарегистрирован в данном конкретном эксперименте. Например, не имеет смысла принимать во внимание очень быстрые и малые смещения атомов и молекул в изучении движения физического маятника и, наоборот, возможное изменение положения тела в описании колебаний его кристаллической решетки. Однако, даже после же-

сткого отбора значимых типов движений и связей лишь очень небольшое число физических систем может быть описано с помощью одной независимой переменной, т.е. как системы с одной степенью свободы. Значительная часть физических процессов описывается только с учетом конечного числа степеней свободы (распределенные системы) или многих степеней свободы (многоатомные молекулы, кристаллические решетки).

Наблюдая за движением системы со многими степенями свободы, можно заметить, что ее различные фрагменты (в нашем случае - маятники) периодически изменяют амплитуду колебаний, т.е. колебания отдельных элементов нестационарны. Вместе с изменением амплитуды колебаний происходит изменение среднего (за период колебаний) запаса кинетической энергии данного элемента, что свидетельствует о существовании в системе периодического перераспределения энергии.

Лишь в двух специальных случаях в системе наблюдаются только стационарные колебания (элементы системы отклоняются от положения равновесия с постоянной амплитудой): во-первых, при фиксировании положения всех элементов - маятников, атомов и др. - кроме одного. В этом случае система искусственно переводится в режим колебаний с одной степенью свободы. Частота такого типа колебаний называется парциальной частотой, а "остаток" колебательной системы - парциальной колебательной системой. Как указано в (1,2), число независимых парциальных систем, которые можно создать из исходной, совпадает с числом степеней свободы; во-вторых, удачным подбором начальных отклонений разных элементов иногда удается возбудить колебания с постоянной во времени амплитудой движения всех элементов системы. Такие колебания называются собственными или нормальными для данной колебательной системы. Их число также совпадает с числом степеней свободы.

Рассмотрим движение двух математических маятников, связанных пружиной и совершающих колебания в плоскости рисунка (рис. 1). Будем счи-

тать углы отклонения маятников малыми ($\sin \varphi \sim \varphi$). В этом приближении уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 l_1 g \varphi_1 + k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 l_2 g \varphi_2 + k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m_1, m_2 – массы грузов, k – коэффициент упругости.

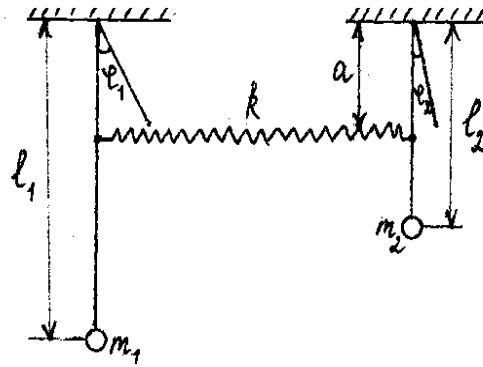


Рис. 1.

Частоты парциальных колебаний получим из уравнений движения, приравнявая в первом из них $\varphi_2 = 0$, а во втором – $\varphi_1 = 0$:

$$\nu_1^2 = \frac{g}{l_1} + \frac{k a^2}{m_1 l_1^2}; \nu_2^2 = \frac{g}{l_2} + \frac{k a^2}{m_2 l_2^2} \quad (2)$$

Решение системы уравнений движения, соответствующее собственным (нормальным) колебаниям системы, ищем в виде

$$\varphi_1 = A \cos(\omega t + \psi), \quad \varphi_2 = B \cos(\omega t + \psi),$$

где частота ω и сдвиг фаз ψ одинаковы для обоих маятников, различим лишь амплитуды смещений (знак амплитуды произволен). После математических преобразований, изложенных в (3), получим две возможные частоты колебаний:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2) - \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4 \frac{k^2 a^4}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2) + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4 \frac{k^2 a^4}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}}} \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношение амплитуд смещений маятников на частотах нормальных колебаний составляет

$$\begin{aligned}\frac{B}{A} \Big|_{\omega_1} &= \frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{ka^2} m_1 l_1^2 = \varepsilon e_1 \\ \frac{B}{A} \Big|_{\omega_2} &= \frac{\nu_1^2 - \omega_2^2}{ka^2} m_1 l_1^2 = \varepsilon e_2\end{aligned}\quad (4)$$

Измерение частот парциальных колебаний в изучаемой системе производится при поочередном закреплении одного из маятников в положении равновесия. Частоты нормальных (собственных) колебаний не удастся измерить настолько же просто, так как при нарушении равновесия системы возникает суперпозиция собственных колебаний вида

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) \\ \varphi_2 &= A_1 \varepsilon e_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \varepsilon e_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2),\end{aligned}$$

где постоянные A_1, A_2, ψ_1, ψ_2 определяются начальными условиями. Колебание каждого из маятников есть сумма двух гармонических колебаний с собственными (нормальными) частотами. Если эти (нормальные) частоты близки по величине, суммарные колебания имеют характер биений. Лишь в одном частном случае совпадающих параметров парциальных колебательных систем ($m_1 = m_2 = m; l_1 = l_2 = l$) можно напрямую измерить частоты нормальных колебаний исходя из наблюдения свободных колебаний нашей системы. Действительно в этом случае

$$\begin{aligned}\nu_1^2 &= \nu_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2} \\ \omega_1^2 &= \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{mk^2} \\ \frac{B}{A} \Big|_{\omega_1} &= 1, \quad \frac{B}{A} \Big|_{\omega_2} = -1\end{aligned}$$

т.е. на частоте ω_1 маятники колеблются синфазно, а на частоте ω_2 - в противофазе. Возбуждение того или другого типа колебаний не представляет труда.

Несмотря на относительно сложное выделение нормальных колебаний

при свободном движении системы со многими степенями свободы, именно эти формы движения определяют резонансные характеристики системы при действии на нее периодической вынуждающей силы. Частоты поглощения и излучения многоатомных молекул в газовой и жидкой фазе, кристаллах совпадают с соответствующими нормальными частотами системы. Резонансные характеристики механических конструкций также определяются собственными (нормальными) частотами. В пренебрежении затуханием колебаний амплитуда движения системы со многими степенями свободы под действием вынуждающей силы с частотой, равной одной из нормальных частот, стремится к бесконечности, что приводит к разрушению системы.

Вынуждающая сила в нашей системы действует на один из маятников, обозначаемый далее индексом «I». Пусть частота вынуждающей силы равна p , а амплитудное значение момента относительно точки крепления первого маятника M_0 . Уравнение движения под действием вынуждающей силы

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 l_1 g \varphi_1 + k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + M_0 \sin(pt) \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 l_2 g \varphi_2 - k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (5)$$

Будем предполагать, что собственные колебания в системе затухли (хотя явного учета затухания у нас в системе уравнений (5) нет!) и установились вынужденные колебания с частотой p . Решение ищем в виде

$$\varphi_1 = C_1 \sin(pt), \quad \varphi_2 = C_2 \sin(pt).$$

Используя соотношение (2), преобразуем систему (5)

$$\begin{aligned} (\nu_1^2 - p^2) C_1 - \frac{k a^2}{m_1 l_1^2} C_2 &= \frac{M_0}{m_1 l_1^2} \\ (\nu_2^2 - p^2) C_2 - \frac{k a^2}{m_2 l_2^2} C_1 &= 0 \end{aligned}$$

и определим амплитуды C_1 и C_2 .

$$C_1 = \frac{M_0}{m_1 l_1^2} \cdot \frac{(\nu_1^2 - p^2)}{\left[(\nu_1^2 - p^2)(\nu_2^2 - p^2) - \frac{k^2 a^4}{m_1 l_1^2 m_2 l_2^2} \right]} \quad (6)$$

$$C_2 = \frac{M_0}{m_1 l_1^2} \cdot \frac{k a^2}{m_2 l_2^2} \cdot \frac{1}{\left[(\nu_1^2 - p^2)(\nu_2^2 - p^2) - \frac{k^2 a^4}{m_1 l_1^2 m_2 l_2^2} \right]}$$

Зависимость амплитуд смещения маятников от частоты вынуждающей силы представлена на рис.2. Резонансное возрастание амплитуды наблюдается вблизи обеих нормальных частот. Интересен факт подавления колебаний первого маятника (к которому приложена вынуждающая сила) на парциальной частоте колебаний второго маятника. Такое подавление вызвано компенсацией момента вынуждающей силы моментом силы, действующей со стороны второго маятника.

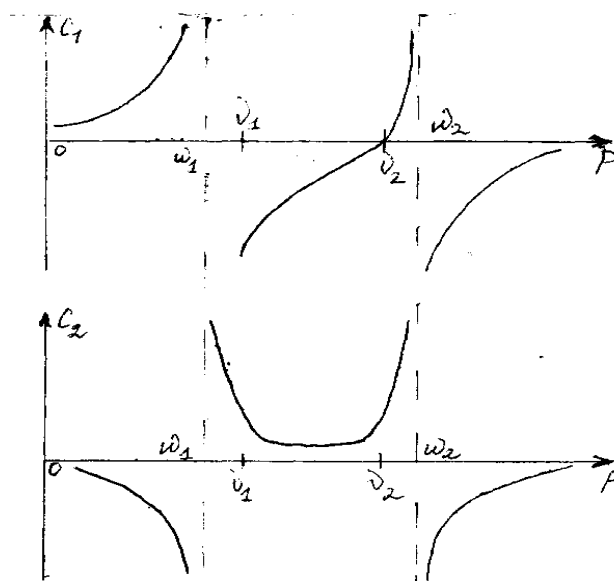


Рис. 2.

Предлагается самостоятельно проверить выполнение условия компенсации. Отмеченный эффект широко применяется на практике: механические успокоители колебаний валов конструируются на основе дополнительной колебательной системы с требуемой парциальной частотой.

Описание экспериментальной установки

Общий вид прибора FPM -13 представлен на рис. 3. Основание (1) оснащено регулируемыми ножками, обеспечивающими выравнивание прибора. В основании закреплена колонка (2). На колонке закреплены втулка (3) и кронштейн (4). На стержне (5) втулки находятся 3 подвески (6), на которых посредством подшипников подвешены два маятника и стержень (7), возбуждающий колебания.

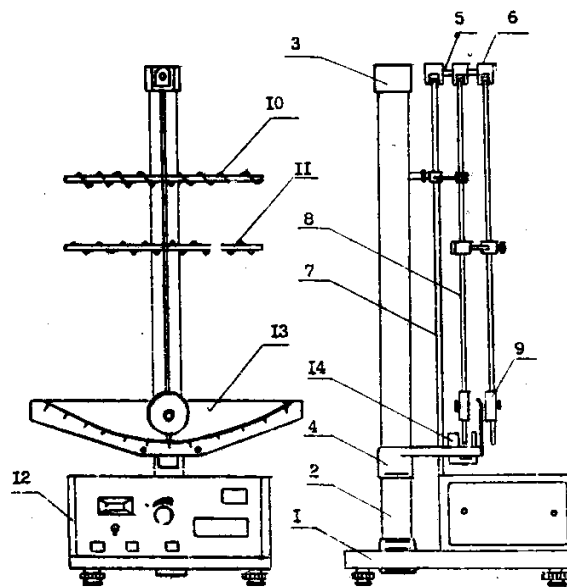


Рис. 3.

Маятник состоит из стержня (8) и перемещаемого груза (9). Маятники сопряжены друг с другом при помощи двух пружин (10), закрепленных в специальной С-образной обойме (1), которую можно перемещать вдоль стержней маятников. Возбуждение колебаний осуществляется при помощи приводного диска, скрепленного на вале электродвигателя, который, двигая стержень (7), сопряженный при помощи двух пружин (10) со стержнем маятника, возбуждает его колебания. Электродвигатель находится в блоке управления и измерений (12). К нижнему кронштейну прикреплена угловая окала (13), при помощи которой определяется амплитуда колебаний маятников. К нему также прикреплен фотоэлектрический датчик (14), световой поток ко-

торого пересекает стержень одного из совершающих колебания сопряженных маятников.

Прибор для исследования колебаний связанных систем состоит из двух маятников, устройства возбуждения колебаний и системы регистрации периода колебаний. Максимальная длина маятника - 0,5 м, масса перемещаемых грузов - 0,1 кг. Амплитуда колебаний регистрируется по отградуированной шкале, расположенной между концами - указателями маятников. Частота вынуждающей силы может изменяться в диапазоне от 0,25 и до 1,5 Гц; Амплитуда момента силы варьируется перемещением соединительной пружины вдоль маятника.

На лицевой стороне панели блока управления и измерений находятся следующие тумблеры:

СЕТЬ - включение и выключение сети,

ВКЛЮЧЕНИЕ ДВИГАТЕЛЯ – обеспечивает подведение питающего напряжения к схеме управления скоростью вращения двигателя,

СБРОС - отброс показаний измерителя времени и начало нового цикла отсчетов,

СТОП - окончание измерений,

ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ - потенциометр настройки скорости вращения двигателя.

Подготовка к измерениям. Прибор готов к использованию непосредственно после включения сетевого напряжения.

Для приготовления прибора необходимо:

- подключить прибор к питающей сети;
- проверить выравнивание прибора;
- нажать клавишу СЕТЬ, проверяя, все ли индикаторы измерителя высвечивают цифру "0", а также светится ли лампочка фотоэлектрического датчика;
- проверить находятся ли стержни маятников на одной вертикальной

плоскости;

- включить питание двигателя;
- плавно вращая ручку потенциометра, проверить, работает ли двигатель, и колеблются ли маятники.

Упражнение 1. *Определение частот парциальных и нормальных колебаний связанной системы из двух одинаковых маятников.* Согласно изложенной выше теоретической модели рассматриваемая колебательная система

имеет два типа нормальных колебаний: синфазное $\omega_{сф} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, и противо-

фазное $\omega_{нф} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$ и два парциальных колебания, совпадающих по

частоте $\nu = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}}$.

При изменении точки крепления маятников пружиной следует ожидать монотонного изменения частоты нормальных колебаний и частоты парциальных колебаний ν при сохранении постоянной частоты нормальных колебаний $\omega_{сф}$.

Измерение частот $\omega_{сф}$, $\omega_{нф}$ и ν советуем выполнить следующим образом:

- установить обоймы, крепящие пружины, в верхней части стержней маятников, а грузы - на нижней части для обоих маятников на одинаковом расстоянии;

- отсоединить пружины от обоймы, соединяющей маятники со стержнем, возбуждающим колебания;

- нажать кнопку СЕТЬ;

- отклонить маятники в одинаковую ($\omega_{сф}$) или противоположные ($\omega_{нф}$) стороны на угол около 10° и отпустить их;

- при измерении частоты парциальных колебаний зафиксировать ближайший к наблюдателю маятник, свободный маятник вывести из положения равновесия на тот же угол и отпустить;

- нажать кнопку СБРОС;
- после подсчета прибором 10 периодов колебаний маятника нажать кнопку СТОП;
- считать с показателей время и количество периодов колебаний, вычислить частоту по формуле $\omega = \frac{2\pi n}{t}$, где n - количество периодов, t - продолжительность измерений. Перемещая пружину, связывающую маятники, вдоль стержней маятников, измерить зависимость частот нормальных и парциальных колебаний от координаты точки крепления пружины. По окончании измерений построить в одной системе координат графики зависимостей $\omega^2(a)$, $\nu^2(a)$. Вычислить на основе экспериментальных зависимостей коэффициент жесткости пружины k .

Упражнение 2. *Изучение резонанса смещений в системе с двумя степенями свободы.*

Используя результаты первого упражнения, установить связывающую маятники пружину в положение, обеспечивающее максимальное различие $\omega_{сф}$ и $\omega_{нф}$.

Измерения советуем выполнять в следующем порядке:

- соединить пружину с обоймой на стержне, возбуждающем колебания;
- включить питание двигателя;
- изменяя обороты двигателя и выжидая установления колебаний, провести измерение амплитуды колебаний второго маятника по шкале на передней панели установки. Частоту колебаний вычислить по 10 периодам, отсчитанным измерителем времени;
- зафиксировать прекращение движения первого маятника при $p \sim \nu$.

Результаты измерений представить в виде графической зависимости амплитуды колебаний второго маятника от частоты вынуждающей силы.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются собственными, а какие - вынужденными?
2. Что называется резонансом?
3. При каких условиях наблюдается явление резонанса?

Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М: Высшая школа, 1986 г.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.1. Механика. М.: Наука, 1989 г.
3. Хайкин С.Э. Физические основы механики. М.: Наука, 1971 г.
4. Стрелков С.П. Механика. М.: Наука, 1975 г.