КАЛМЫЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра экспериментальной и общей физики

Лабораторная работа № 11

«*Математический и оборотный маятники***»**

Лаборатория № 210

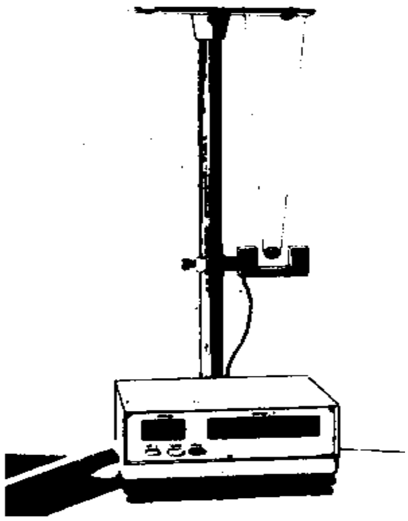
Лабораторная работа № 11.

«*Математический и оборотный маятники*»

Цель работы: изучение свободных колебаний математического и физического маятников, определение ускорения свободного падения с их помощью.

Оборудование: лабораторная установка “Универсальный маятник”.

1. Математический маятник



Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. *Свободными* называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия.

Время, за которое колебательная система совершает один полный цикл движения, возвращаясь в первоначальное положение, называется *периодом колебаний* ***T***.

Простейшими являются гармонические колебания, т.е. такие колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (1)$$

Величина $\boldsymbol{A}$, равная максимальному отклонению от положения равновесия, называется *амплитудой* гармонических колебаний. Величина амплитуды зависит от первоначального отклонения и от толчка, после которых начались колебания маятника. Величина, стоящая под знаком косинуса, $\boldsymbol{(\omega t + \alpha)}$, называется *фазой*. Фаза растет пропорционально времени. Величина $\boldsymbol{\alpha}$ - *начальная фаза*, или фаза в момент времени $\boldsymbol{t=0}$, она зависит от отклонения и скорости в момент начала отсчета времени $\boldsymbol{t}$.

Поскольку косинус - периодическая функция с периодом $\boldsymbol{2\pi}$, период гармонических колебаний определяется из условия:

$$[\omega (t + T) + \alpha] = [(\omega t + \alpha)] + 2\pi$$

откуда

$$T = 2\pi / \omega \qquad (2)$$

Число колебаний в единицу времени называется *частотой колебаний* $\boldsymbol{\upsilon}$. Частота $\boldsymbol{\upsilon}$ связана с периодом колебаний $\boldsymbol{T}$ следующим соотношением:

$$\upsilon = 1/T \qquad (3)$$

Частоту измеряют в *герцах*, размерность **Гц = 1/с**. Из (2) следует, что

$$\omega = 2\pi / T \qquad (4)$$

Таким образом, $\boldsymbol{\omega}$ дает число колебаний за $\boldsymbol{2\pi}$ секунд. Величину $\boldsymbol{\omega}$ называют *круговой* или *циклической частотой*. Она связана с обычной частотой соотношением:

$$\omega = 2\,\pi\,\upsilon \qquad (5)$$

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити.

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризоваться углом $\boldsymbol{\varphi}$, образованным нитью с вертикалью (рис. 1).

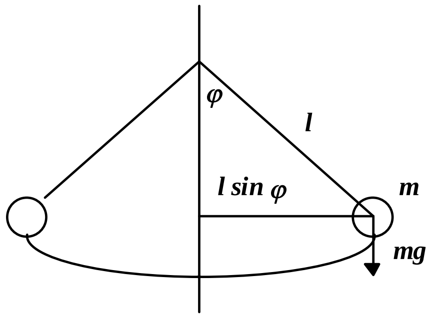


Рис. 1.

При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент силы M, равный по величине: $m{\cdot}g{\cdot}l{\cdot}\sin\varphi$ (m - масса маятника, а l - длина). Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, и аналогичен в этом отношении квазиупругой силе. Так как момент силы M препятствует угловому смещению φ, им нужно приписывать противоположные знаки. Следовательно, выражение для вращательного момента имеет вид:

$$M = - m{\cdot}g{\cdot}l{\cdot}\sin\varphi \qquad (6)$$

Уравнение динамики вращательного движения $I{\cdot}\varphi'' = M$, где I - момент инерции маятника, а φ'' - угловое ускорение (вторая производная угла поворота по времени).

Учитывая, что $I = m{\cdot}l^2$, получаем для маятника уравнение динамики

$$m{\cdot}l^2{\cdot}\varphi'' = - m{\cdot}g{\cdot}l{\cdot}\sin\varphi.$$

Последнее уравнение можно привести к виду

$$\varphi'' + g{\cdot}\sin\varphi / l = 0 \qquad (7)$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний (малых углов φ). В этом случае можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Введя, кроме того, обозначение

$$g / l = \omega^2 \qquad (8)$$

мы придем к следующему уравнению:

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0 \qquad (9)$$

Его решение имеет вид: $\varphi = A{\cdot}\cos(\omega t + \alpha)$.

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение φ математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону.

Так как период колебаний $T=2\pi/\omega$, то подставляя в (8), получим выражение для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g} \tag{10}$$

Из (8) и (10) следует, что частота и период колебаний математического маятника зависят от длины маятника и от ускорения силы тяжести и не зависят от массы маятника.

Отметим, что, решив уравнение (7), можно найти для периода колебаний следующую формулу:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g} \cdot \{1 + (1/2)^2 \sin^2 A/2 + (1/2 \cdot 3/4)^2 \sin^4 A/2 + ...\},$$

где A - амплитуда колебаний, т.е. наибольший угол, на который отклоняется маятник из положения равновесия. Таким образом, в общем случае период колебаний математического маятника зависит и от амплитуды.

Из (10) находим следующее выражение для ускорения свободного падения:

$$g = 4\pi^2 l / T^2. \tag{11}$$

КОНСТРУКЦИЯ ПРИБОРА

Общий вид универсального маятника представлен на рис. 2.

Основание ***1*** оснащено регулируемыми ножками ***2***, которые позволяют произвести выравнивание прибора. В основании закреплена колонка ***3***, на которой зафиксирован кронштейн ***5*** с фотоэлектрическим датчиком ***6***. После отвинчивания воротка ***11*** верхний кронштейн можно поворачивать вокруг колонки. Затяжение воротка ***11*** фиксирует кронштейн в любом, произвольно избранном положении. С одной стороны кронштейна ***4*** находится математический маятник ***7***, с другой, на вмонтированных вкладышах, оборотный маятник ***8***. Длину математического маятника можно регулировать при помощи воротка ***9*** , а ее величину можно определить при помощи шкалы на колонке ***3***.

Оборотный маятник выполнен в виде стального стержня, на котором зафиксированы две повернутые друг к другу лезвиями призмы и два ролика. На стержне, через 10 мм выполнены кольцевые нарезания, служащие для точного определения длины оборотного маятника (расстояния между призмами). Ножи и ролики можно перемещать вдоль оси стержня и фиксировать в любом положении. Эти элементы были выполнены таким образом, что их размер вдоль стержня является кратным 10 мм, а фиксирующие воротки размещены таким образом, чтобы при помощи кольцевых нарезаний можно было их наглухо блокировать.

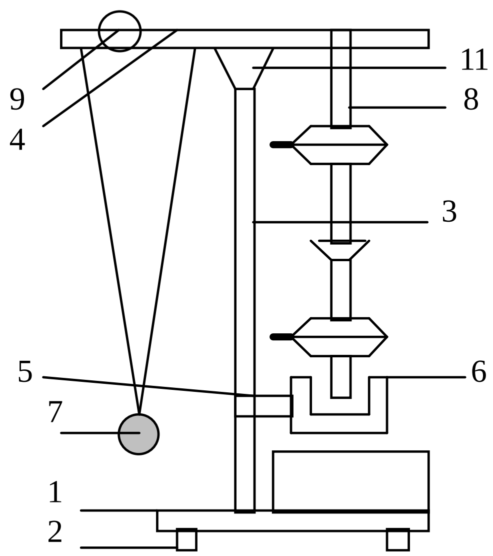


Рис. 2.

Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в произвольно избранном положении.

Фотоэлектрический датчик соединен разъемом с привинченным к основанию универсальным миллисекундомером ***10***.

И З М Е Р Е Н И Я

1. Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком установить в нижней части колонки, обращая внимание на то, что верхняя грань кронштейна показывает на шкале длину, соответствующую длине математического маятника.

2. Поворачивая верхний кронштейн, поместить над датчиком математический маятник.

3. Вращая вороток на верхнем кронштейне, установить длину математического маятника таким образом, чтобы черта на шарике была продолжением черты на корпусе фотоэлектрического датчика.

4. На шкале прибора прочитать значение длины $\boldsymbol{l}$ маятника.

5. Отклонив шарик на 4-5^0 от положения покоя, привести маятник в движение.

6. Нажать кнопку “СБРОС”.

7. После подсчета измерителем около 10 колебаний ($\boldsymbol{n}$ = 10 - показания цифрового индикатора “ПЕРИОД”), нажать кнопку “СТОП”.

8. На цифровом индикаторе “СЕКУНДОМЕР” прочитать время $\boldsymbol{t}$, за которое было совершено n колебаний.

9. По формуле $\boldsymbol{T=t/n}$ определить период $\boldsymbol{T}$ математического маятника.

З А Д А Н И Е

1. Проверьте, подтверждается ли на опыте линейная зависимость

$$\boldsymbol{T^2 = 4\pi^2 l / g} \qquad (\boldsymbol{g} = 9{,}8 \text{ м/с}^2)$$

между квадратом периода колебаний $\boldsymbol{T^2}$ и длиной $\boldsymbol{l}$ подвеса (см. формулу (11)).

Для этого измерьте период колебаний маятника для 4 длин подвеса от $\boldsymbol{l_{min}}$ = 20 см до $\boldsymbol{l_{max}}$ = 50 см. При каждом значении $\boldsymbol{l}$ период колебаний $\boldsymbol{T}$ определяется как среднее из трех измерений. При измерениях угол отклонения маятника должен быть малым (3-5^0). Результаты измерений занесите в таблицу 1.

Таблица 1.

№ п/п	l, м	Δl, м	T_1, с	T_2, с	T_3, с	$T_{ср}$, с	ΔT, с	$T^2_{ср}$, с^2	$\Delta(T^2)$, с^2

$T_i = t_i / n$ (i = 1, 2, 3), где t_i - время за которое совершено n полных колебаний, n=10 - число колебаний.

$$T_{ср} = (T_1 + T_2 + T_3) / 3$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} (T_i - \overline{T})^2}{k(k-1)}}, \quad (k = 3),$$

$$\Delta T^2 = 2T_{ср} \cdot \Delta T_{ср}$$

По результатам измерений постройте график зависимости T^2 от l в осях координат $x = l, y = T^2$.

2. Определите ускорение свободного падения g. Для этого измерьте период колебаний T при наибольшем значении длины l, чтобы уменьшить относительную погрешность $\Delta l/l$. Вычислите g с помощью формулы (11) при найденных значениях T и l. Оцените погрешность Δg и $\Delta g/g$.

Результаты измерений занесите в таблицу 2.

Таблица 2.

l, м	Δl, м	T_1, с	T_2, с	T_3, с	$T_{ср}$, с	ΔT, с	g, м/с^2	Δg, м/с^2	$\Delta g/g$

$$T_i = t_i / n$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} (T_i - \overline{T})^2}{k(k-1)}}, \quad (к = 3)$$

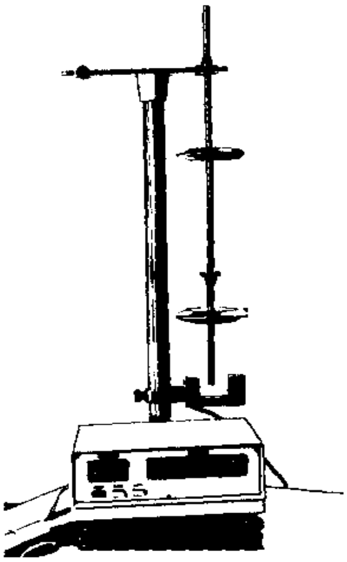
$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{\overline{T}^2}\Delta l + \frac{8\pi^2 \overline{l}}{\overline{T}^3}\Delta T,$$

$$\Delta g/g = \Delta l/l + 2\Delta T/T$$

Полученный результат запишите в виде:

$$\boldsymbol{g = g \pm \Delta g = g\ (1 \pm \Delta g/g)}, \quad \text{м/с}^2.$$

2. Оборотный маятник



Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции. В положении равновесия центр инерции маятника $\boldsymbol{C}$ находится под точкой подвеса маятника $\boldsymbol{O}$, на одной с ней вертикали (рис. 3).

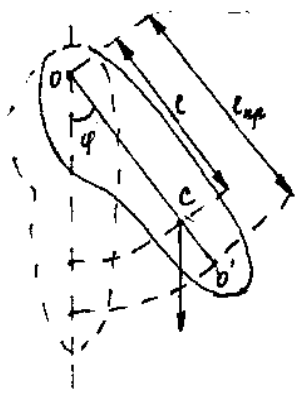


Рис. 3.

При отклонении маятника от положения равновесия на угол $\boldsymbol{\varphi}$ возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен:

$$\boldsymbol{M = -\ m \cdot g \cdot l \cdot sin\varphi} \qquad (12)$$

где $\boldsymbol{m}$ - масса маятника, а $\boldsymbol{l}$ - расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника. Знак “-” имеет то же значение, что и в случае формулы (6).

Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой $\boldsymbol{I}$**,** можно написать:

$$\boldsymbol{I \cdot \varphi'' = - m \cdot g \cdot l \cdot sin\varphi} \qquad (13)$$

В случае малых колебаний (13) переходит в уже известное нам уравнение:

$$\boldsymbol{\varphi'' + \omega^2 \cdot \varphi = 0} \qquad (14)$$

Через $\boldsymbol{\omega^2}$ обозначена в данном случае следующая величина:

$$\boldsymbol{\omega^2 = m \cdot g \cdot l / I} \qquad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) следует, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром инерции маятника. В соответствии с $\boldsymbol{T = 2\pi/\omega}$ и (15) период колебаний физического маятника определяется выражением:

$$\boldsymbol{T = 2\pi} \sqrt{I / m \cdot g \cdot l} \qquad (16)$$

Из сопоставления формул (10) и (16) получается, что математический маятник с длиной:

$$\boldsymbol{l_{np} = I / m \cdot l} \qquad (17)$$

будет иметь такой же период колебаний, как данный физический маятник. Величину (17) называют *приведенной длиной* физического маятника. Таким образом, приведенная длина - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Точка на прямой, соединяющая точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется *центом качания физического маятника* (см. точку $\boldsymbol{O}$ на рис. 3). Точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности, заключающееся в том, что при последовательном подвешивании маятника за ту или другую из них период колебания его остается одним и тем же:

$$\boldsymbol{T = 2\pi} \sqrt{l_{np} / g} \tag{18}$$

где $\boldsymbol{l_{np}}$ - приведенная длина маятника.

На установленном свойстве взаимности основано определение ускорения свободного падения $\boldsymbol{g}$ с помощью так называемого оборотного маятника.

Оборотный маятник (рис. 4) представляет собой стальной стержень ***1***, на котором могут передвигаться и закрепляться в разных его точках два тяжелых груза ***2*** и две легкие опорные призмы ***3***. Перемещением грузов либо опорных призм добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебания был одинаков.

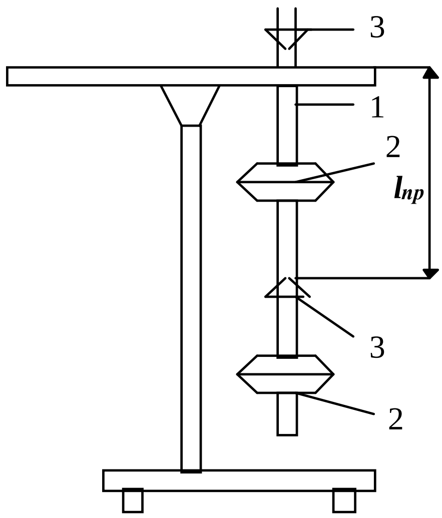


Рис. 4.

Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно приведенной длине $\boldsymbol{l_{np}}$. Измерив период колебания маятника $\boldsymbol{T}$ и зная $\boldsymbol{l_{np}}$, можно из (18) найти ускорение свободного падения:

$$\boldsymbol{g = 4\pi^2 \, l_{np} / T^2} \tag{19}$$

И З М Е Р Е Н И Я

1. Повернуть верхний кронштейн на 180^0.

2. Зафиксировать грузы на стержне несимметрично, т.е., чтобы один из них находился вблизи конца стержня, а другой - вблизи его середины (примерно как на рис. 4).

3. Опорные призмы закрепить по обеим сторонам центра тяжести маятника таким образом, чтобы они были обращены друг к другу опорными ребрами. Первую призму поместить вблизи свободного от груза конца стержня, а вторую - по середине между грузами.

4. Проверить, совпадают ли опорные ребра призм с нарезаниями на стержне.

5. Подвесить маятник на вкладыше верхнего кронштейна на первой призме, находящейся вблизи конца стержня.

6. Нижний кронштейн вместе с фотоэлектрическим датчиком переместить таким образом, чтобы стержень маятника пересекал оптическую ось фотодатчика.

7. Отклонить маятник на 4-5^0 от положения равновесия и отпустить.

8. Нажать клавишу “СБРОС”.

9. После подсчета измерителем около 10 колебаний, нажать клавишу “СТОП”.

10. По формуле $\boldsymbol{T = t/n}$, где $\boldsymbol{n}$ - число колебаний, определить $\boldsymbol{T_1}$ оборотного маятника.

11. Повторить измерения $\boldsymbol{T_1}$ не менее трех раз и найти среднее арифметическое значение $\boldsymbol{T_{1ср}}$.

12. Снять маятник и подвесить на второй призме.

13. Нижний кронштейн с фотоэлектрическим датчиком переместить таким образом, чтобы маятник пересекал оптическую ось фотодатчика.

14. Отклонить маятник на 4-5^0 от положения равновесия и отпустить.

15. Аналогично пунктам выше определить период $\boldsymbol{T_2}$ и сравнить результат с полученной ранее величиной $\boldsymbol{T_{1ср}}$.

16. Если $T_{2ср} > T_{1ср}$, то вторую призму передвинуть в направлении груза, находящегося в конце стержня, а если $T_{2ср} < T_{1ср}$ - то в направлении середины стержня. При этом положения грузов и первой призмы не менять.

17. Повторно измерить период T_2 и сравнить с величиной $T_{1ср}$.

18. Изменять положения второй призмы до тех пор, пока не будет получено равенство $T_{2ср} = T_{1ср}$ с точностью до 0,5%.

19. Найти среднее значение $T_{2ср}$ по результатам не менее трех измерений.

20. Определить приведенную длину оборотного маятника $l_{пр}$, подсчитывая количество нарезаний на стержне между опорными ребрами призм, которые нанесены через каждые 10 мм.

З А Д А Н И Е

1. Добейтесь совпадения периода колебаний на второй призме T_2 с периодом колебаний на первой призме T_1 с точностью до 0,5%.

2. Измерьте приведенную длину маятника $l_{пр}$, как расстояние между опорными призмами $T_{1ср}$ и $T_{2ср}$.

3. Вычислить ускорение свободного падения g, используя формулу (19). При этом следует учитывать, что период колебаний $T = (T_{1ср} + T_{2ср})/2$.

4. Найти погрешность Δg и $\Delta g/g$ и оценить точность экспериментального значения g по формуле $\delta = |g - g_T|\ 100\% / g_T$, где $g_T =$ 9,81 м/с^2.

Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 3.

Таблица 3.

$T_{1,1}$	$T_{1,2}$	$T_{1,3}$	$T_{1ср}$	$T_{2,1}$	$T_{2,2}$	$T_{2,3}$	$T_{2ср}$	T	ΔT	$l_{пр}$	$\Delta l_{пр}$	g	Δg	$\Delta g/g$	δ,%

$T_{1,i} = t_{1i} / n$ $\quad T_{1ср}=(T_{1,1}+T_{1,2}+T_{1,3})/3$ $\quad T=(T_{1ср}+T_{2ср})/2$

$T_{2,i}=t_{2i}/n$ $\quad T_{2ср}=(T_{2,1}+T_{2,2}+T_{2,3})/3$ $\quad \Delta T=(|T_{1ср}-T|+|T_{2ср}-T|)/2$

$\Delta g/g=\Delta l_{пр}/l_{пр} + 2\Delta T/T$ $\quad \Delta g=(\Delta g/g)\cdot g$ $\quad \delta=(|g-g_T|/g_T)\cdot 100\%$

Полученное значение g запишите в виде: $g=g\pm\Delta g=g(1\pm\Delta g/g)$.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими?

2. Что называется амплитудой, периодом, частотой и фазой колебаний?

3. Чем отличается математический маятник от физического?

4. Что называется приведенной длиной физического маятника?

5. От чего зависят периоды колебаний физического и математического маятников?

6. Что такое оборотный маятник?

7. Какова методика определений $\boldsymbol{g}$ с помощью оборотного маятника?

Л и т е р а т у р а

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. - М.: Высшая школа, 1986, с. 181-184.

2. Хайкин С.Э. Физические основы механики.- М.: Наука, 1971, с. 407-412.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. - М.: Наука, 1974, с. 209-213.

4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. - М.: Наука, 1982, с. 195-197.