КАЛМЫЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра экспериментальной и общей физики

Лабораторная работа № 9

“Определение моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний”

Лаборатория № 210

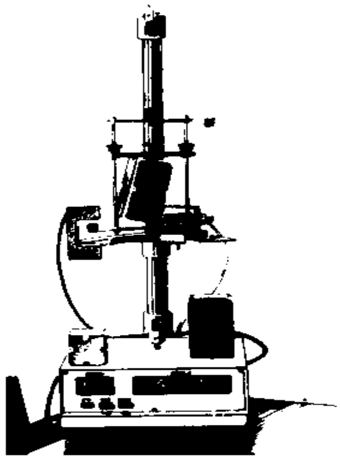
Лабораторная работа № 9

“Определение моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний”

Цель работы: изучение крутильных колебаний и определение методом крутильных колебаний моментов инерции твердых тел.

Оборудование: лабораторная установка.

Теоретическое введение



В работе проверяется соотношение

$$I(n) = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2\gamma \qquad (1)$$

для однородных симметричных твердых тел (куб, прямоугольный параллелепипед). Главные оси таких тел являются осями симметрии. Они перпендикулярны граням и проходят через геометрический центр тела (рис. 1).

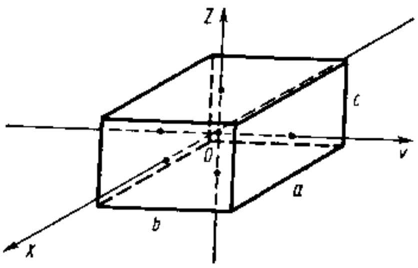


Рис. 1.

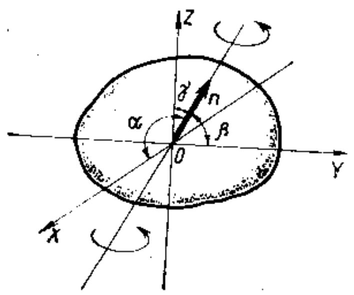


Рис. 2.

Для измерения моментов инерции твердого тела относительно оси, определяемой единичным вектором

$$n = \{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\}, \quad n^2 = cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1, \qquad (2)$$

где α, β, γ — углы между направлениями вектора n и осями координат OX, OY и OZ (рис. 2), применяется метод крутильных колебаний.

Исследуемое твердое тело жестко закрепляется в рамке крутильного маятника, подвешенной на упругой вертикально натянутой проволоке. Если вывести маятник из положения равновесия, то он будет совершать колебания. Период этих колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{I_M / D}, \qquad (3)$$

где $I_м$ — момент инерции маятника относительно оси вращения, D — постоянная момента упругих сил.

Момент инерции маятника равен сумме момента инерции I_0 рамки и моментов инерции I исследуемого тела:

$$I_M = I_0 + I.$$

Поэтому период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{(I_0 + I)/D}. \qquad (4)$$

Если колеблется свободная рамка без тела, то ее период колебали, очевидно, равен

$$T = 2\pi\sqrt{I_0 / D}. \qquad (5)$$

Из этих уравнений можно исключить неизвестную величину D. В результате находим

$$I = I_0(T^2 - T_0^2)T_0^2. \qquad (6)$$

Соотношение (6) позволяет выразить момент инерции I тела относительно оси маятника через момент инерции I_0 свободной рамки. Для этого нужно измерить периоды колебаний T_0 и T соответственно для свободной рамки и для рамки с телом. Период колебаний T, так же как и момент инерции I тела, зависит от ориентации тела по отношению к оси маятника. Запишем (6) в виде

$$I(n) = I_0(T^2(n) - T_0^2)T_0^2, \quad (7)$$

где n — единичный вектор, направленный вдоль оси маятника. В лабораторной установке ось маятника (она же ось вращения тела) направлена по вертикали. Поэтому во всех опытах следует считать, что единичный вектор n направлен вертикально вверх. Момент инерции тела относительно вертикальной оси, т. е. $I(n)$, изменяют, поворачивая тело и закрепляя его в различных положениях по отношению к этой оси (рис. 3).

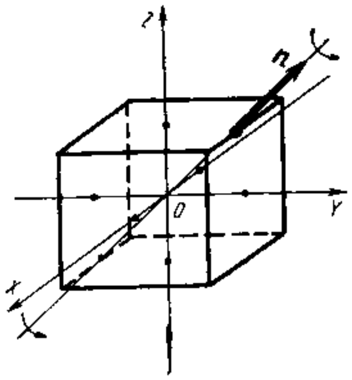


Рис. 3.

Направив оси OX, OY и OZ вдоль главных осей тела, мы выбрали систему координат $OXYZ$, жестко связанную с телом. Поворачивая тело, мы изменяем направления вектора n в жестко связанной с телом системе координат $OXYZ$. Закрепим тело в рамке так, чтобы ось вращения n совпадала с какой-либо его главной осью OX, OY или OZ. Тогда из (7) получим

$$I_x = I_0 \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_0^2}, I_y = I_0 \frac{T_y^2 - T_0^2}{T_0^2}, I_z = I_0 \frac{T_z^2 - T_0^2}{T_0^2}, \quad (8)$$

где T_x, T_y и T_z — соответственно периоды колебаний маятника, когда ось его вращения n совпадает с одной из главных осей OX, OY или OZ.

Подставив (7) и (8) в исходное соотношение (1), получим

$$T^2(n) = T_x^2 \cos^2\alpha + T_y^2 \cos^2\beta + T_z^2 \cos^2\gamma. \quad (9)$$

Таким образом, существует простая связь между периодами крутильных колебаний тела T_x, T_y и T_z относительно его осей симметрии OX, OY и OZ и периодом колебаний этого же тела относительно оси n с направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos^2\gamma$.

Выражение (9), так же как и формула (3) для периода крутильных колебаний, справедливо, если затухание мало. Практически для этого достаточно, чтобы число колебаний N, за которое амплитуда уменьшается в 2—3 раза, удовлетворяло неравенству $N > 10$. Если это неравенство выполняется, то проверка соотношения (1) сводится к проверке равенства (9). Оно удобно тем, что все входящие в него величины в условиях опыта могут быть измерены непосредственно.

Измерения

Будем проверять зависимость (9) для простого случая, когда исследуемое твердое тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Обозначим длину ребер параллелепипеда a, b и c. Исследуем три образца: куб ($a=b=c$), симметричный параллелепипед ($a=b$, $c \neq a$) и параллелепипед, у которого длины всех трех ребер различны ($a \neq b \neq c$). Выясним, как можно провести проверку зависимости (9) в этих трех случаях.

Однородный куб

Очевидно, что все три момента инерции куба относительно главных осей OX, OY и OZ одинаковы:

$$I_x = I_y = I.$$

Из (1) с учетом второго равенства (2) находим

$$I(n) = I_x (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = I_x = const. \qquad (10)$$

Таким образом, момент инерции однородного куба относительно любой проходящей через его центр оси одинаков. Ясно, что и период крутильных колебаний куба должен быть одинаковым для любой оси вращения, проходящей через его центр:

$$T(n) = T_x = const. \qquad (11)$$

Проверить это можно закрепляя куб в рамке в различных положениях, при которых ось вращения проходит через центр куба, и измеряя соответствующие периоды крутильных колебаний.

Симметричный прямоугольный параллелепипед

Очевидно, что в этом случае моменты инерции параллелепипеда относительно главных осей OX и OY и соответствующие им периоды крутильных колебаний равны между собой:

$$I_x = I_y, \qquad T_x = T_y.$$

Из (1) и (9) с учетом равенства

$$cos^2\alpha + cos^2\beta = 1- cos^2\gamma$$

получаем

$$I(n) = I_x\,(1- cos^2\gamma) + I_z\,cos^2\gamma, \tag{12}$$

$$T^2(n) = T_x^2(1- cos^2\gamma) + T_z^2\,cos^2\gamma. \tag{13}$$

Таким образом, период крутильных колебаний $T(n)$ зависит только от угла γ, который ось вращения n образует с осью тела OZ. Величина $T(n)$ не зависит от углов α и β (при $\gamma=const$).

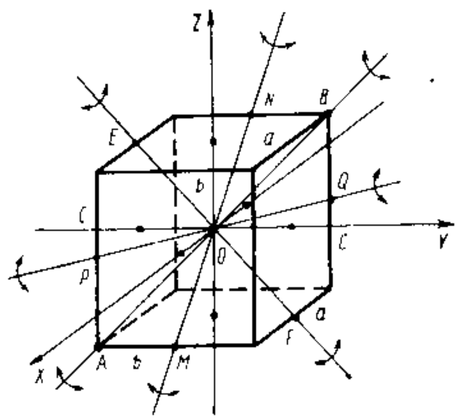


Рис. 4.

В частности, должен быть одинаковым период колебаний относительно любой оси, лежащей в плоскости OXY (т. е. при $\gamma=\pi/2$). В этом случае $cos\gamma=0$ и, согласно (13),

$$T(n) = T_x = const\ (\gamma=\pi/2). \tag{14}$$

Проверить это соотношение можно закрепляя в рамке крутильного маятника симметричный параллелепипед так, чтобы ось вращения была перпендикулярна его большому ребру. Периоды крутильных колебаний при любом таком положении тела должны совпадать.

Несимметричный параллелепипед

Закрепим параллелепипед в рамке так, чтобы ось вращения совпадала с его главной диагональю *AB* (рис. 4). Вычислив направляющие косинусы, из (9) находим

$$T_{AB}^2(a^2 + b^2 + c^2) = T_x^2a^2 + T_y^2b^2 + T_z^2c^2. \qquad (15)$$

Аналогично, для осей *EF, MN* и *PQ* из (9) следует:

$$\begin{aligned} T_{EF}^2(b^2 + c^2) &= T_y^2b^2 + T_z^2c^2, \\ T_{MN}^2(a^2 + c^2) &= T_x^2a^2 + T_z^2c^2, \\ T_{PQ}^2(a^2 + b^2) &= T_x^2a^2 + T_y^2b^2. \end{aligned} \qquad (16)$$

Таким образом, для проверки формулы (9) в случае несимметричного параллелепипеда можно выяснить, выполняются ли соотношения (15) и (16) для измеренных значений периодов колебаний.

Обсудим теперь, как можно измерить момент инерции исследуемого тела. В соотношениях (7) и (8) моменты инерции тела выражаются через соответствующие периоды крутильных колебаний и момент инерции I_0 свободной рамки. Поэтому, измерив I_0, мы сможем найти момент инерции $I(n)$ любого из изучаемых в работе тел.

Для определения момента инерции рамки можно воспользоваться эталонным телом, момент инерции $I_э$ которого известен. Тогда, согласно (6), имеем

$$I_0 = I_э \frac{T_0^2}{T_э^2 - T_0^2}. \qquad (17)$$

где $T_э$ — период колебаний рамки с закрепленным в ней эталонным телом. В качестве эталонного тела в работе используется однородный куб. Момент инерции такого куба относительно проходящей через его центр оси можно вычислить по формуле

$$I_э = \frac{1}{6} ma^2, \qquad (18)$$

где m — масса куба, a — сторона куба.

Вычислив $I_э$ по формуле (18), можно измерить периоды колебаний T_0 и $T_э$ свободной рамки и рамки с кубом и затем определить искомую величину I_0 из соотношения (17).

Задание

1. Убедитесь в том, что колебания крутильного маятника являются слабо затухающими. Для этого выведите маятник из положения равновесия и определите приближенно число колебаний N, за которое их амплитуда уменьшается в 2—3 раза. Измерения N проведите для свободной рамки и для рамки с закрепленным в ней образцом. Если $N > 10$, то затухание маятника мало и можно пользоваться формулой (3).

2. Определите период колебаний, закрепляя в рамке в различных положениях образцах, имеющий форму куба. Результаты измерений занесите в таблицу 1.

Таблица 1

T_1	T_2	…	T_{10}	$T_{ср}$	$\Delta T = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2}$

Периоды колебаний $T_1, T_2, \ldots T_{10}$ определите для следующих положений куба:

а) ось вращения проходит через центры двух противоположных граней (T_1, T_2 и T_3);

б) ось вращения проходит по главной диагонали куба (T_4, T_5, T_6 и T_7);

в) ось вращения проходит через середины противолежащих ребер куба (T_8, T_9 и T_{10}).

3. Определите период колебаний однородного симметричного прямоугольного параллелепипеда, закрепляя его в четырех различных положениях, при которых ось вращения перпендикулярна его большому ребру. Результаты измерений занесите в таблице 2.

Таблица 2

T_1	T_2	T_3	T_4	T	ΔT

4. Определите период колебаний однородного несимметричного прямоугольного параллелепипеда относительно его главных осей (периоды T_x, T_y и T_z) и относительно осей AB, EF, MN и PQ (рис. 4). Измерьте длину ребер параллелепипеда. Результаты измерений занесите в таблицу 3.

Таблица 3

T_x	T_y	T_z	T_{AB}	T_{EF}	T_{MN}	T_{PQ}	a	b	c
T_x^2	T_y^2	T_z^2	T_{AB}^2	T_{EF}^2	T_{MN}^2	T_{PQ}	a^2	b^2	c^2

Убедитесь, что для найденных значений этих величин с хорошей точностью выполняются соотношения (15) и (16).

5. Измерьте длину ребра a куба и по формуле (18) найдите момент инерции $I_э$, куба относительно проходящей через его центр оси.

Измерьте период T_0 крутильных колебаний свободной рамки и по формуле (17) вычислите ее момент инерции I_0.

Найдите, пользуясь формулами (8), по измеренным значениям периодов колебаний T_x, T_v и T_z (табл. 3) моменты инерции несимметричного параллелепипеда I_x, I_y и I_z. Результаты занесите в таблицу 4.

m	a	$I_э$	$T_э$	T_0	I_0	I_x	I_y	I_z

Оцените погрешность, с которой определены моменты инерции I_x, I_y и I_z.

Контрольные вопросы

1. Оцените добротность колебаний, используя опытные данные, полученные в работе.

2. Покажите, что момент инерции однородного куба относительно оси, проходящей через его центр,

$$I_э = \tfrac{1}{6} m a^2,$$

где m — масса куба, a — сторона куба.

3. Выведите формулу (3)

$$T = 2\pi \sqrt{\tfrac{I_M}{D}}.$$

Литература

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М., 1989.

2. Хайкин С. Э. Физические основы механики. М.. 1971.

3. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики. М., 1989