КАЛМЫЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра экспериментальной и общей физики

Лабораторная работа № 7

«ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА»

Лаборатория № 210

Лабораторная работа № 7.

ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Цель работы: ознакомление со сложным движением и изучение закона сохранения механической энергии.

Оборудование: маятник Максвелла, комплект колец, электронный секундомер.

Т е о р и я

Маятник Максвелла представляет собой массивный диск ***Д***, насаженный на ось ***C*** и подвешенный на нити ***N***, прикрепленные к оси (рис. 1).

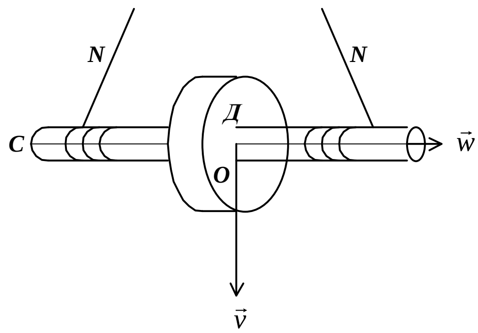


Рис. 1.

Если нити ***N*** намотать на ось ***C***, а затем предоставить маятник самому себе, то диск будет совершать колебания, состоящие в чередующихся спусках на длину нитей и подъемах на первоначальную высоту. При рассмотрении движения маятника мы воспользуемся общим правилом, состоящим в том, что произвольное движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела со скоростью ***v*** какой-либо его точки ***O*** и вращения вокруг оси, проходящей через эту точку.

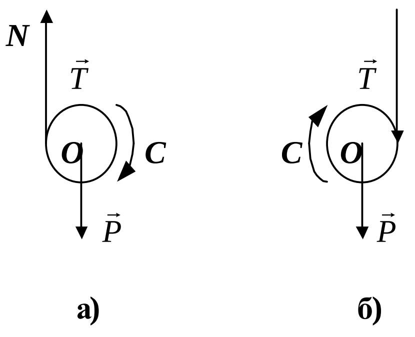


Рис. 2.

На рис. 2 схематично показаны ось ***C*** с центром в точке ***O***, нить и действующие силы: $\vec{T}$ - сила натяжения нити, направленная вдоль касательной к оси ***C*** и силы тяжести $\vec{P}$, приложенные к центру инерции. Силы $\vec{T}$ и $\vec{P}$ направлены в противоположные стороны и образуют пару сил, которая вызывает вращение диска вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести, и поступательное движение центра тяжести.

При вращении диска по часовой стрелке в случае, изображенном на рис. 2,а диск будет опускаться пока нити полностью не размотаются. Дойдя до нижней точки, диск будет по прежнему вращаться по часовой стрелке и разматывание нитей сменится намоткой (рис. 2,б), что приведет к подъему диска. Очевидно, что диск не может прекратить свое движение в нижней точке, т.к. кинетическая энергия вращения $\boldsymbol{K_{вр}}$ и кинетическая энергия поступательного движения $\boldsymbol{K_{пост}}$ не могут исчезнуть. Из закона сохранения энергии следует:

$$\boldsymbol{K_{вр} + K_{пост} + U_{пост} = const},$$

где $\boldsymbol{U_{пост}}$ - потенциальная энергия маятника. Т.к.

$$\boldsymbol{K_{вр} = I\,w^2/2, \quad K_{пост} = m\,v^2/2, \quad U_{пост} = m\,g\,h},$$

то закон сохранения энергии для маятника Максвелла можно записать в виде

$$\boldsymbol{m \cdot g \cdot h = m\,v^2/2 + I\,w^2/2}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{I}$ - момент инерции диска, $\boldsymbol{w}$ - угловая скорость вращения относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести, $\boldsymbol{v}$ - скорость движения центра тяжести, $\boldsymbol{h}$ - расстояние от нижней точки, $\boldsymbol{m}$ - масса диска, $\boldsymbol{g}$ - ускорение свободного падения.

В нижней точке полная механическая энергия диска состоит из кинетической энергии вращательного движения и кинетической энергии поступательного движения. В верхней точке (в момент остановки диска) полная механическая энергия состоит только из потенциальной энергии диска. Здесь мы для простоты предполагаем, что процесс смены направления скорости движения $\boldsymbol{v}$ центра тяжести в нижней точке происходит мгновенно.

Закон вращательного движения имеет вид:

$$\boldsymbol{M = I \cdot \varepsilon}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{M}$ - полный момент сил относительно некоторой оси, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - угловое ускорение при вращении тела вокруг этой оси.

Момент силы равен произведению силы $\boldsymbol{F}$ на плечо $\boldsymbol{l}$ (плечо - это расстояние между осью вращения и прямой, вдоль которой действует сила). Т.к. ось вращения проходит через центр инерции, то $\boldsymbol{l_p = 0}$, $\boldsymbol{l_T = r}$, где $\boldsymbol{r}$ - радиус оси $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{l_p}$ - плечо силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{l_T}$ - плечо силы $\boldsymbol{T}$. Таким образом:

$$\boldsymbol{M = T \cdot r}. \tag{3}$$

С учетом формулы (3) и соотношения $\boldsymbol{a = \varepsilon\, r}$, где $\boldsymbol{a}$ - ускорение движения центра тяжести, уравнение (2) принимает вид:

$$\boldsymbol{T \cdot r = I \cdot a / r}, \tag{4}$$

откуда

$$\boldsymbol{I = T \cdot r^2 / a}. \tag{5}$$

С другой стороны, так как на диск действуют две силы $\vec{T}$ и $\vec{P}$, направленные в противоположные стороны, то согласно второму закону Ньютона:

$$\boldsymbol{m \cdot a = P - T}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{P = m \cdot g}, \tag{6}$$

т.е.

$$\boldsymbol{a = (P - T) / m}. \tag{7}$$

Здесь за положительное направление выбрано направление вниз. Подставляя выражение для $\boldsymbol{a}$ из (7) в (5), получим:

$$I = \frac{Tr^2 m}{P - T} = \frac{Tr^2}{P - T} \cdot \frac{p}{g}$$

(8)

Здесь $\boldsymbol{T}$ - суммарное натяжение обеих нитей. Из (5) видно, что ускорение:

$$\boldsymbol{a = T \cdot r^2 / I} \tag{9}$$

Приравнивая (7) и (9) получим соотношение

$$(P - T) / m = T \cdot r^2 / I, \qquad (10)$$

которое можно рассматривать как линейное уравнение относительно T.

Из уравнения (10) следует, что сила натяжения нитей T полностью определяется величинами I, r, m и g $(P = m \cdot g)$, т.е. величинами, которые не меняются в процессе колебаний маятника. Отсюда вытекает, что натяжение нитей T постоянно и не зависит от того, движется диск вниз или вверх, а, значит, согласно (9) постоянно и ускорение a, т.е. движение - равноускоренное.

При этом равноускоренном движении с начальной скоростью v_0=0 диск за время t проходит путь равный

$$h = a \cdot t^2 / 2 \qquad (11)$$

со скоростью

$$v = a \cdot t. \qquad (12)$$

Подставляя ускорение a из уравнения (11) в (12), получим

$$v = 2 \cdot h / t. \qquad (13)$$

Скорость поступательного движения диска по величине равна линейной скорости на оси маятника. Следовательно, угловая скорость вращения маятника равна:

$$w = v / r = 2 \cdot v / D \quad (\text{т.к. } r = D / 2), \qquad (14)$$

где D -диаметр оси маятника с нитью подвески.

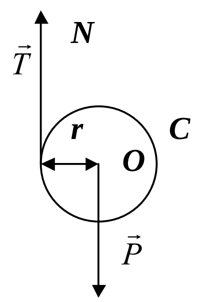


Рис. 3.

С учетом (13) выражение (14) приобретает вид:

$$w = 4 \cdot h / D\, t. \qquad (15)$$

Подставляем (13) и (15) в уравнение (1), что дает:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2}\left(\frac{2h}{t}\right)^2 + \frac{I}{2}\left(\frac{4h}{Dt}\right)^2$$

Отсюда получаем выражение для момента инерции маятника Максвелла:

$$I = \frac{1}{4} m D^2 \left(\frac{g t_{cp}^2}{2h} - 1\right) \qquad (16)$$

З а д а н и е

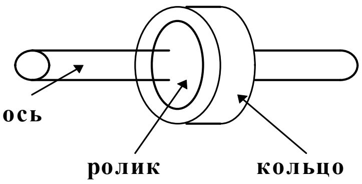
1. Определить экспериментально момент инерции маятника Максвелла для трех колец различной массы, используя выражение (16).

Причем, здесь масса маятника $\boldsymbol{m = m_0 + m_p + m_к}$, где $\boldsymbol{m_0}$ - масса оси маятника, $\boldsymbol{m_p}$ - масса ролика, $\boldsymbol{m_к}$ - масса кольца, наложенного на ролик. Значение масс оси, ролика, колец нанесены на них, а диаметр $\boldsymbol{D = D_0 + 2D_n}$ ($\boldsymbol{D_0}$ = 10 мм, $\boldsymbol{D_n}$ = 0,5 м), где $\boldsymbol{D_0}$ - диаметр оси, $\boldsymbol{D_n}$ - диаметр нити подвески).

Для каждого кольца произвести не менее пяти измерений времени падения $\boldsymbol{t_i}$ маятника и определить среднее значение

$$t_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$

Высота падения маятника $\boldsymbol{h}$ во всех опытах остается постоянной.



По формуле (16) вычислить момент инерции маятника. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 1.

Найти погрешности $\boldsymbol{\Delta I/I}$ и $\boldsymbol{\Delta I}$ и указать главные причины погрешности.

Таблица 1.

m, кг	Δm, кг	t_1, с	t_2, с	t_3, с	t_4, с	t_5, с	$t_{ср}$, с	Δt, с	I, кг·м^2	$\Delta I/I$	ΔI, кг·м^2
	$0{,}1\cdot10^{-3}$										

$\boldsymbol{D}$ = ... м, $\boldsymbol{h}$ = ... м, $\boldsymbol{\Delta D} = 0{,}1\cdot10^{-3}$ м, $\boldsymbol{\Delta h} = 0{,}5\cdot10^{-3}$ м,

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - t)^2}{n(n-1)}}(n = 5)$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta D}{D} + 2\frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta h}{h}, \Delta I = \left(\frac{\Delta I}{I}\right)\cdot I$$

2. Рассчитать теоретические значения момента инерции маятника по формуле $\boldsymbol{I_t = I_0 + I_p + I_к}$, где $\boldsymbol{I_0}$ - момент инерции оси, $\boldsymbol{I_p}$ - момент инерции ролика, $\boldsymbol{I_к}$ - момент инерции кольца, наложенного на ролик.

$\boldsymbol{I_0 = 1/8 \cdot m_0 D_0^2}$, ($\boldsymbol{m_0}$ = 0,033 кг, $\boldsymbol{D_0}$ = 0,01 м)
$\boldsymbol{I_p = 1/8 \cdot m_p (D_0^2 + D_p^2)}$, ($\boldsymbol{m_p}$ = 0,125 кг, $\boldsymbol{D_p}$ = 0,086 м)
$\boldsymbol{I_к = 1/8 \cdot m_к (D_p^2 + D_к^2)}$, ($\boldsymbol{m_{к1}}$ = 0,256 кг, $\boldsymbol{m_{к2}}$ = 0,398 кг, $\boldsymbol{m_{к3}}$ = 0,526 кг, $\boldsymbol{D_к}$ = 0,105 м).

3. Сравнить опытные значения момента инерции маятника $\boldsymbol{I}$ с теоретическими $\boldsymbol{I_t}$ и сделать выводы.

Таблица 2.

№ п/п	$\boldsymbol{I}$, кг м^2	$\boldsymbol{I_t}$, кг м^2	$\delta = \lvert \boldsymbol{I} - \boldsymbol{I_t} \rvert / \boldsymbol{I_t} \cdot 100\%$
1. 2. 3.			

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
2. Какие другие законы механики использовались в этой работе?

Л и т е р а т у р а

1. Стрелков С.П. Механика. М.: Наука, 1975 г.
2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. М.: Наука, 1971.