Лабораторная работа

Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика

Описание целей работы

Конкретная цель	Критерии достижения цели
I. Изучение теории	
1. Основные сведения о механической энергии.	Студент правильно отвечает на вопросы № 1 - 4
2. Основные сведения о механических колебаниях.	Студент правильно отвечает на вопросы № 5 - 10
3. Теория метода	Студент может объяснить решение задачи и ответить на вопросы № 11 - 14
II. Практические навыки	
Студент должен научиться: - определить период малых колебаний шарика; - измерить радиусы шариков; - определить радиус кривизны поверхности и погрешность определения	

Оборудование: вогнутая сферическая поверхность, шарики, секундомер, штангенциркуль.

1.1 **Механическими колебаниями** называют движения, обладающие той или иной степенью повторяемости. Например, колебания маятника, часов, груза на пружине, качелей, поплавка на воде и др.

Периодом колебаний T называется время, за которое совершается одно полное колебание.

Величина, обратная периоду, $\nu = \frac{1}{T}$ называется **частотой колебаний.** Она показывает, сколько колебаний совершает тело за единицу времени. Частота измеряется в герцах (1 Гц = 1с$^{-1}$). Для математического описания колебаний используются периодические функции sin и cos. Наиболее простой вид имеют зависимости:

$$x(t) = x_{max} \cos\varphi(t) \quad \text{или} \quad x(t) = x_{max} \sin\varphi(t), \qquad (1)$$

где x(t) – координата точки в произвольный момент времени t, причем ось x выбирается вдоль траектории колеблющейся точки, а начало оси – в положении равновесия точки (рис.1);

x_{max} – амплитуда колебаний – модуль максимального отклонения точки от положения равновесия. Вместо x_{max} можно использовать любую букву.

φ(t) – фаза колебаний: φ(t) = ωt + φ_o, где величина $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ называется **круговой** (или циклической) **частотой**.

Она измеряется в $с^{-1}$. Величина φ_o– начальная фаза колебаний. Она равна фазе колебаний в начальный момент времени, т.е.

$\varphi_o = \varphi(t = 0)$.

1.2 Колебательное движение происходит с переменными скоростью и ускорением.

Если $$x(t) = x_{мах} \cos(\omega t - \varphi_0)$$

то скорость $$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -x_{\max}\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = -\upsilon_{мах}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $x_{\max}\,\omega = \upsilon_{\max}$ – амплитуда изменений скорости. Мы видим, что наибольшая скорость колеблющаяся точка имеет в положении равновесия, а в крайних точках (при x = ± $x_{мах}$) скорость точки равна нулю.

Ускорение колеблющейся точки:

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_{\max}\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -a_{мах} cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $x_{\max}\omega^2 = a_{\max}$ – амплитуда изменений ускорения точки. Наибольшее ускорение точка будет иметь в крайних положениях. В положении равновесия ускорение точки равно нулю.

Колебания, совершающиеся в соответствии с законом (1) называются **гармоническими.**

1.3 Полная энергия колеблющейся точки складывается из кинетической и потенциальной энергий. В соответствии с законом сохранения полной энергии имеем:

$$E_{ПОЛН} = E_К + E_П = \frac{m\upsilon^2}{2} + E_П = \frac{m\upsilon_{MAX}^2}{2} = E_{П\ MAX}$$

В крайних положениях кинетическая энергия равна нулю (т.к. υ = 0), в положении равновесия нулевое значение имеет потенциальная энергия.

Т.к. при гармонических колебаниях

$x_{\max}\,\omega = \upsilon_{\max}$, то $E_{ПОЛН} = \frac{m}{2}(x_{мах}\omega)^2 = \frac{m\omega^2 x_{мах}^2}{2} \sim x_{мах}^2$, т.е.

полная энергия точки при гармонических колебаниях пропорциональна квадрату амплитуды.

Теория метода

В данной работе предлагается определить радиус кривизны сферической поверхности методом катающегося шарика. Если шар поместить на вогнутую поверхность, то равновесным для него является положение, при котором его центр тяжести находится в низшей точке поверхности (точка С на рис.2)

Если шар вывести из положения равновесия и предоставить ему возможность свободно кататься по вогнутой поверхности, то он будет совершать колебания около положения равновесия. Покажем, что в отсутствии трения, движение шарика представляет собой гармоническое колебание.

Шарик массой m, поднятый на высоту h относительно положения устойчивого равновесия, обладает потенциальной энергией $E_П$=mgh. Расстояние АС, на которое перемещается центр шара в обе стороны от положения равновесия, соответствует амплитуде колебаний. Если амплитуда колебаний *а* мала, то дуга АС, хорда АС и амплитуда колебаний шарика практически равны между собой.

Рис. 2

Из подобия ΔАВС и Δ АСД получим

$$AC^2 = СД \times CB \qquad (*)$$

Учитывая, что АС= *а*, СД=h и СВ=2R (рис.2), перепишем (*) в виде a^2 =2Rh, где R – расстояние от центра кривизны вогнутой поверхности до центра шарика. Отсюда $h = \frac{a^2}{2R}$.

Тогда потенциальная энергия шарика в точке А равна

$$E_П = mgh = \frac{mg}{2R} a^2 \qquad (2)$$

Из уравнения (2) видно, что потенциальная энергия $E_П$ в конечной точке движения пропорциональна квадрату амплитуды *а*, что характерно для гармонических колебаний. Следовательно, колебания шарика на вогнутой поверхности при малых амплитудах можно считать гармоническими, т.е. совершающимися по закону S = $a \cdot \cos\omega_0 t$, где ω_0- циклическая частота колебаний шарика.

Если пренебречь трением, (оно мало), то должен выполняться закон сохранения энергии. Это значит, что при движении шарика из точки А в точку С потенциальная энергия (в т. А) полностью переходит в кинетическую (в т.С)

$$E_{пот}\,(\text{в т.А}) = E_{кин}\,(\text{в т.С}) \qquad (3)$$

Кинетическая энергия в данном случае складывается из кинетической энергии поступательного движения центра тяжести $E_{Kпост}$ и кинетической энергии вращательного движения шарика вокруг его центра $E_{K\,вращ}$;
Кинетическая энергия поступательного движения равна

$$E_{Kпост} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \qquad (4)$$

где $\upsilon_{\max} = \omega_0 a = \dfrac{2\pi a}{T}$, а T – период колебаний шарика.
Кинетическая энергия вращательного движения равна

$$E_{K\,вращ} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\times\left(\frac{2\pi a}{Tr}\right)^2 \qquad (5)$$

где $I = \dfrac{2}{5}mr^2$ -момент инерции шарика относительно его центра тяжести, r – радиус шарика, $\omega = \dfrac{\upsilon}{r} = \dfrac{2\pi a}{Tr}$ - угловая скорость вращения шарика вокруг собственной оси в точке С. Подставляя выражения (2), (4), (5) в уравнение (3) получим

$$\frac{mga^2}{2R} = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\times\left(\frac{2\pi a}{Tr}\right)^2$$

или $$\frac{mga^2}{2R} = \frac{14}{5}\cdot\frac{m\pi^2 a^2}{T^2}; \qquad \frac{g}{2R} = \frac{14\pi^2}{5T^2}$$

Отсюда $$R = \frac{5gT^2}{28\pi^2}. \qquad (6)$$

Если R – расстояние от центра кривизны вогнутой поверхности до центра шарика, r – радиус шарика, то радиус кривизны этой поверхности равен

$$R_{KP} = R + r \qquad (7)$$

Таким образом, измерив период колебаний T и радиус шарика r можно определить радиус кривизны сферической поверхности.

3. Измерения

1. Протрите чистой, сухой тряпкой вогнутую поверхность и шарики.
2. Выберите один из шариков и определите период его колебаний. Для этого, отклонив шарик из положения равновесия, измерьте время t, за которое шарик совершит n=10÷20 полных колебаний. Период $T = \dfrac{t}{n}$.
3. Повторите опыт не менее трех раз и определите среднее значение периода колебаний и среднюю погрешность его определения.

P.S! Амплитуда колебаний шарика должна быть очень небольшой (малые колебания)

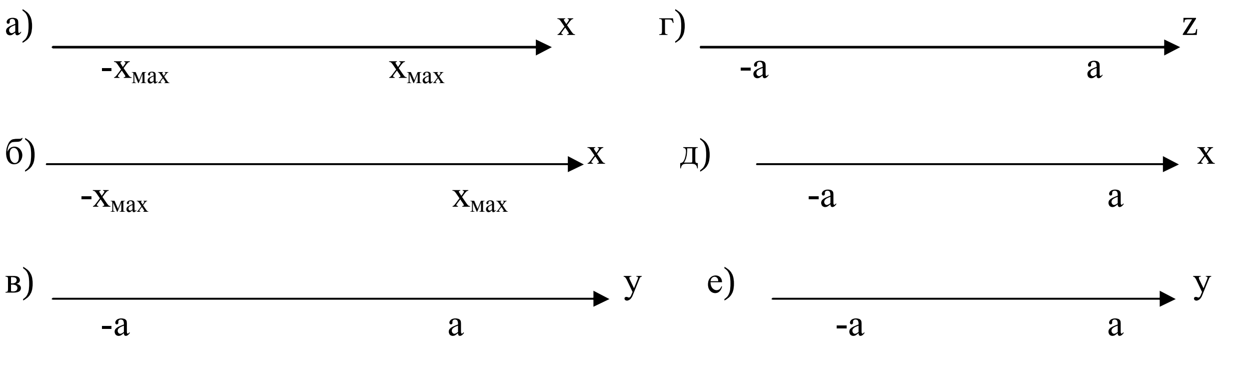
4. Вычислить значение R, подставив найденное значение периода колебаний T в формулу (6).
5. Измерьте микрометром (или штангенциркулем) радиус r шарика.
6. Найдите радиус кривизны вогнутой поверхности по формуле (7).
7. Возьмите другой шарик и повторите измерения п.п.2-6.
8. Сравните найденные значения радиуса кривизны поверхности и найдите его среднее значение.
9. Рассчитайте погрешности этих измерений.
10. Результаты измерений и расчетов внесите в таблицу.

Таблица

№п/п	r, м	Δr,м	n	t,c	T,c	R,м	ΔR,м	$R_{КР}$,м	$\Delta R_{КР}$,м

Контрольные вопросы:

1. Что в физике называется “энергией”? Какие виды энергии Вы знаете?
2. Что такое кинетическая энергия? Как вычисляют ее величину: для поступательного движения? для вращательного движения тела?
3. Что такое потенциальная энергия? В каких случаях потенциальную энергию тела, можно считать по формуле
   $E_П = mqh$?
4. Сформулируйте закон сохранения энергии. В каких случаях
   сохраняется механическая энергия?
5. Дайте определение и приведите примеры механических колебаний.
6. Дайте определение понятий: период колебаний, частота колебаний, циклическая частота, амплитуда.
7. Как меняется положение колеблющегося тела со временем? Какие колебания называются гармоническими?
8. Каков математический смысл понятия «фаза»? Ее физический смысл?
9. Напишите зависимость x(t) для следующих случаев: (на рис. указаны положение тела и направление его движения при t=0)



10. Как определить скорость колеблющейся точки? Ее ускорение?
11. Объясните, почему шарик, вернувшись в положение равновесия, не останавливается?

12. Объясните, почему колебания шарика можно считать гармоническими только при малых амплитудах?
13. В каком случае потенциальная энергия шарика в верхнем положении полностью перейдет в кинетическую в его низшем положении?
14. Поясните, как вы нашли угловую скорость вращения шарика в его низшем положении? В каком случае она будет равна нулю?
15. Вы использовали два шарика разных радиусов. В каком случае Вы получили большую погрешность?